习题课二　曲面积分的计算

一、内容提要及教学要求

1 对面积的曲面积分

设 Σ：$z=z(x, y)$，$(x, y)\in D_{xy}$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy$$

“一代、二换、三投影，实质化为重积分算”。

2 对坐标的曲面积分

1). 计算

Σ：$z=z(x, y)$时，

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \pm\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$$

“上正下负”；

Σ：$x=x(y,z)$时，$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \pm \iint\limits_{D_{yz}} R[x(y,z),y,z]dydz$

"前正后负"；

Σ：$y=y(z,x)$时，$\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx = \pm \iint\limits_{D_{zx}} Q[x,y(z,x),z]dzdx$

"右正左负"

"一代二定三投影"

2). 两类曲面积分之间的联系

（1）两类曲面积分之间的联系

$$\iint_{\Sigma} \{P,Q,R\}\cdot\{\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\}$$

$$=\iint_{\Sigma} \{P,Q,R\}\cdot\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}\mathrm{d}S$$

$n=\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$，为有向曲面$\Sigma$上点（$x$，$y$，$z$）处的单位法向量。

(2）投影转换法　Σ: $z=z(x, y)$, $(x, y)\in D_{xy}$

$$\vec{A}=\{P,Q,R\},\ \vec{n}=\pm\{-z_x,-z_y,1\}$$

$$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

$$=\iint_{\Sigma}\{P\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}+Q\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}+R\}dxdy$$ 取上侧

$$=\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\{-z_x,-z_y,1\}dxdy=\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}\,dxdy.$$ 上正下负

$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\cos\gamma\, dS$　$\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\cos\alpha\, dS=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\cos\beta\, dS=\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

3、高斯公式、通量与散度

1). 高斯公式

$$\oiint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv$$

$$\oiint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \overrightarrow{dS} = \oiint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv$$

P、Q、R在 Ω 上一阶偏导连续，Σ是 Ω 的整个边界曲面的外侧。

（1）注意高斯公式的条件；

（2）Σ不封闭时采取“补面”法 $\iint\limits_{\Sigma}=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=\iiint\limits_{\Omega}-\iint\limits_{\Sigma_1}$

补的Σ_1要使Ω上P、Q、R上一阶偏导连续，

$\iiint\limits_{\Omega}$ 和 $\iint\limits_{\Sigma_1}$ 易计算。

2). 通量与散度

通量（流量） $\Phi=\iint\limits_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{dS}$

散度 $\operatorname{div} A=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$

高斯公式可记作 $\oiint\limits_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{dS}=\iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}\vec{A}dv$

4、斯托克斯公式、环流量与旋度

1). *Stokes*公式

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

P、Q、R在空间一维单连通区域G内一阶偏导连续，Σ与Γ符合右手规则。

或 $$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot \vec{ds} = \iint_{\Sigma} \mathrm{rot}\vec{A} \cdot \vec{dS}$$

$$= \iint_{\Sigma} \mathrm{rot}\vec{A} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

2). 环流量与旋度

$$\vec{A} = \{P, Q, R\},$$

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)k$$

沿有向闭曲线Γ的曲线积分

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$$

叫做向量场A沿有向闭曲线 Γ的环流量。

曲面积分的计算法

1. 基本方法

$$\text{曲面积分}\begin{cases}\text{第一类（ 对面积 ）}\\\text{第二类（ 对坐标 ）}\end{cases}\xrightarrow{\text{转化}}\text{二重积分}$$

(1) 统一积分变量 — 代入曲面方程

$$\text{(2) 积分元素投影}\begin{cases}\text{第一类：始终非负}\\\text{第二类：有向投影}\end{cases}$$

(3) 确定二重积分域

— 把曲面积分域投影到相关坐标面

2. 基本技巧

（1）利用对称性及重心公式简化计算

（2）利用高斯公式 $\begin{cases}\text{注意公式使用条件}\\ \text{添加辅助面的技巧}\end{cases}$

（辅助面一般取平行坐标面的平面）

（3）两类曲面积分的转化

二、典型例题

1、选择与填空

1)、Σ：$x^2+y^2+z^2=a^2$上半球面，Σ_1为Σ在第一卦限部分，则下式成立的是___C___

A $\iint\limits_{\Sigma} x\,dS = 4\iint\limits_{\Sigma_1} x\,dS$　　B $\iint\limits_{\Sigma} y\,dS = 4\iint\limits_{\Sigma_1} y\,dS$

C $\iint\limits_{\Sigma} z\,dS = 4\iint\limits_{\Sigma_1} z\,dS$　　D $\iint\limits_{\Sigma} xyz\,dS = 4\iint\limits_{\Sigma_1} xyz\,dS$

2)、Σ：$x^2+y^2+z^2=a^2$，则$\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS =$ ___$4\pi a^4$___

例 计算$\iint\limits_{\Sigma}(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2)dS$ $\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$

解 利用轮换对称性 $\iint\limits_{\Sigma}x^2dS=\iint\limits_{\Sigma}y^2dS=\iint\limits_{\Sigma}z^2dS$

原式$=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\iint\limits_{\Sigma}x^2dS$

$$=\frac{1}{3}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS$$

$$=\frac{1}{3}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\iint\limits_{\Sigma}R^2dS$$

$$=\frac{4\pi R^4}{3}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$

3) Σ：$x^2+y^2+z^2=1$，$z\geq 0$上侧则$\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz=$ ___0___

解 $\Sigma_1: x=\sqrt{1-y^2-z^2}$ 前侧

$\Sigma_2: x=-\sqrt{1-y^2-z^2}$ 后侧

在yOz平面的投影区域：$D_{yz}: y^2+z^2\leq 1, z\geq 0$

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz = \iint\limits_{\Sigma_1} x^2dydz + \iint\limits_{\Sigma_2} x^2dydz$$

$$= \iint\limits_{D_{yz}} (1-y^2-z^2)dydz - \iint\limits_{D_{yz}} (1-y^2-z^2)dydz = 0$$

解法二：慎用对称性，容易出错！

4)、Σ：$x^2+y^2+z^2=a^2$取外侧，

则$\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}=$ ____ 0 ____

$$原式=\frac{1}{a^2}\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$$

$$=\frac{2}{a^2}\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dv$$

$$\iiint\limits_{\Omega}xdv=\iiint\limits_{\Omega}ydv=\iiint\limits_{\Omega}zdv=0$$

向量形式

5)、设$\vec{A}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$,

则$div\vec{A}$ ____ $=2x+2y+2z$ ____ $,rot\vec{A}=$ ____ $\vec{0}$ ____

例1. 计算曲面积分 $I=\oiint_{\Sigma}[(x+y)^2+z^2+2yz]\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是球面 $x^2+y^2+z^2=2x+2z$.

解: $I=\oiint_{\Sigma}[(x^2+y^2+z^2)+2xy+2yz]\mathrm{d}S$

$$=\underbrace{\oiint_{\Sigma}(2x+2z)\mathrm{d}S}_{\text{用重心公式}}+\underbrace{2\oiint_{\Sigma}(x+z)y\mathrm{d}S}_{\text{利用对称性}}$$

$$=2(\bar{x}+\bar{z})\oiint_{\Sigma}\mathrm{d}S+0$$

$$=\mathbf{2\times(1+1)\times 4\pi\times 2=32\pi}$$

Σ: $(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=2$

例2　计算$\iint\limits_{\Sigma}(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy$

Σ 为$z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le z\le h)$的外侧

解法一：$\iint\limits_{\Sigma}(y^2-z)dydz=\iint\limits_{\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_2}$　　Σ_1 是 Σ的前半部分，Σ_2是 Σ的后半部分

$$=\iint\limits_{D_{yz}}(y^2-z)dydz-\iint\limits_{D_{yz}}(y^2-z)dydz=0$$

类似地 $\iint\limits_{\Sigma}(z^2-x)dzdx=0$　　$D_{xy}: x^2+y^2\le h^2$

而$\iint\limits_{\Sigma}(x^2-y)dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}(x^2-y)dxdy$

$$I=-\iint\limits_{D_{xy}}(x^2-y)dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}x^2dxdy$$

$$=-\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h r^3dr=-\frac{\pi}{4}h^4$$

例2　计算$\iint\limits_{\Sigma}(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy$

Σ 为$z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le z\le h)$的外侧

方法2　转换为第一类曲面积分:

$$\vec{n}=\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},-1\right\}$$

$$\overrightarrow{n^o}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},-1\right\}$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint\limits_{\Sigma}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}(y^2-z)+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(z^2-x)-(x^2-y)\right]dS$$

例2 计算$\iint\limits_{\Sigma}(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy$

Σ 为$z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le z\le h)$的外侧

由$z=\sqrt{x^2+y^2}$解得$\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}=\sqrt{2}$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint\limits_{\Sigma}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}(y^2-z)+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(z^2-x)-(x^2-y)\right]dS$$

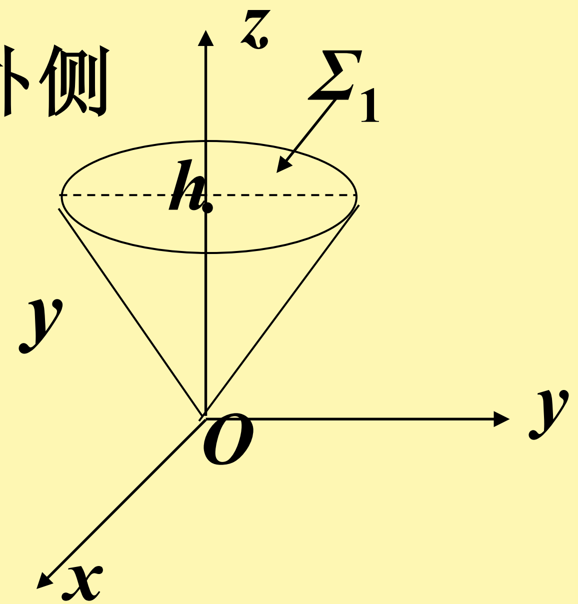
$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left[\left(\frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-x+y\sqrt{x^2+y^2}-\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+y-x^2\right]dxdy$$

$$=0-\iint\limits_{D_{xy}}x^2dxdy=-\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy=-\frac{\pi}{4}h^4$$

利用对称性

例2 计算$\iint\limits_{\Sigma}(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy$

Σ为$z=\sqrt{x^2+y^2}\ (0\le z\le h)$的外侧



方法三： 高斯公式

$$P=y^2-z,\quad Q=z^2-x,\quad R=x^2-y$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$$

Σ_1 $x^2+y^2\le h^2, z=h$取上侧,则

$$\iint\limits_{\Sigma}=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\oiint\limits_{\Sigma_1}=\iiint\limits_{\Omega}0dv-\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2-y)dxdy$$

$$=-\iint\limits_{D_{xy}}(x^2-y)dxdy=-\frac{\pi}{4}h^4$$

例6 设 Σ 是一光滑闭曲面,所围立体 Ω 的体积为V

θ 是 Σ 外法线向量与点 (x,y,z) 的向径 $\vec{r}$ 的夹角,

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 试证 $\dfrac{1}{3}\oiint_\Sigma r\cos\theta\, dS=V$.

证明: 设 Σ 的单位外法向量为:

$$\vec{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}\quad \vec{r}=\{x,y,z\},$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{|\vec{n}||\vec{r}|}=\frac{x}{r}\cos\alpha+\frac{y}{r}\cos\beta+\frac{z}{r}\cos\gamma$$

$$\frac{1}{3}\oiint_\Sigma r\cos\theta\, dS=\frac{1}{3}\oiint_\Sigma\left(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma\right)dS$$

$$=\frac{1}{3}\iiint_\Omega 3\,dv=V$$

例7. 计算$\iint\limits_{\Sigma} \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{|\vec{r}|^2} dS$, Σ为一不经过原点的封闭曲面，

$\vec{n}$为Σ上点(x,y,z)处的单位外法向量，$\vec{r}=\{x,y,z\}$.

解：原式$=\iint\limits_{\Sigma} \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{|\vec{r}|^3} dS = \iint\limits_{\Sigma} \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} dS$

$$= \iint\limits_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - x\cdot\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^3} = \frac{y^2+z^2-2x^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}$$

由对称性知 $\dfrac{\partial Q}{\partial y}=\dfrac{z^2+x^2-2y^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}$, $\dfrac{\partial R}{\partial z}=\dfrac{x^2+y^2-2z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}$

所以除原点外处处有 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$

(1) : Σ不包围原点, $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{|\vec{r}|^2}dS=0$

(2) : Σ包围原点,

$$原式=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},\quad \Sigma_1: x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\iint\limits_{\Sigma_1}xdydz+ydzdx+zdxdy=\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint\limits_{\Omega}3dv=4\pi$$

例8.设L 是平面 $x+y+z=2$与柱面$|x|+|y|=1$的交线

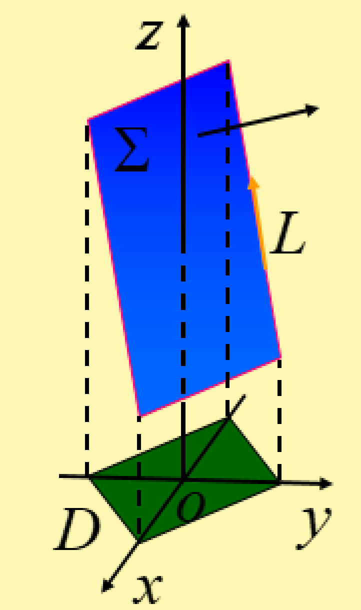
从 z 轴正向看去, L 为逆时针方向, 计算

$$I=\oint_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$$

解: 记 Σ 为平面 $x+y+z=2$上 L 所围部分的上侧,

D为Σ在 xoy 面上的投影.

由斯托克斯公式



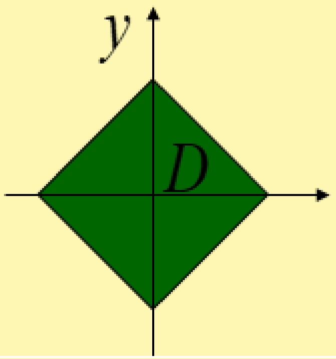
$$I=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & 2z^2-x^2 & 3x^2-y^2 \end{vmatrix} dS$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma (4x+2y+3z)\mathrm{d}S$$

$$I = \cdots = -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (4x + 2y + 3z)\,\mathrm{d}S$$

$$\Sigma : x + y + z = 2, \quad (x, y) \in D$$

$$D : |x| + |y| \le 1$$



$$= -2\iint_{D} (x - y + 6)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

D 的形心

$\bar{x} = \bar{y} = 0$

$$= -12\iint_{D} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -24$$